Ensaio Sobre Primos Gêmeos

A intenção deste ensaio não é tentar provar que os primos gêmeos são infinitos. Apenas gostaríamos de acrescentar outro caminho para que demais interessados na Teoria dos Números possam ajudar na elucidação deste mistério.

A conjectura de Polignac afirma que cada natural par é igual à diferença de dois primos; mas esta conjectura, ao que parece, ainda não foi provada. Entretanto, nós observamos haver certa correlação daquela tese com os fundamentos de nosso estudo anterior, como proposto em **“Goldbach - Nova Conjectura”**, que conduziu a esta monografia, sobre primos gêmeos.

Inicialmente vamos resumir a proposta equivalente à conjectura de Goldbach, que pode ser examinada em detalhes em [http://www.apex.eti.br](http://www.apex.eti.br/).

Todos naturais > 1 podem ser representados pela média de dois primos **p** e **q** equidistantes de um natural **n**, através de um índex inteiro **k**, tal que:

**n  (p  q)  2**, sendo

**p  n  k** e

**q  n  k**.

Há uma simetria envolvendo **n** e ambos os primos **p** e **q** com amplitude

3 ••• **n** ••• 2n  3.

Utilizaremos estes conceitos como alicerce para o estudo que apresentaremos sobre os **primos gêmeos**, os pares (g, h), com

| h  g | 2.

Então temos, dentro de nossa formulação, para um determinado kg:

g  (pg  qg)  2,

pg  (g  kg),

qg  (g  kg);

E para um determinado kh:

h  (ph  qh)  2,

ph  (h  kh),

qh  (h  kh).

Por exemplo, seguem abaixo, algumas simetrias com o par (71, 73).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Par (g, h)** | **k** | **p** | **q** |
| g  71  h  73 | kg  12 | pg  59 | qg  83 |
| kh  6 | ph  67 | qh  79 |
| kg  18 | pg  53 | qg  89 |
| kh  36 | ph  37 | qh  109 |
| kg  30 | Pg  41 | qg  101 |
| kh  30 | ph  43 | qh  103 |
| kg  66 | pg  5 | qg  137 |
| kh  66 | ph  7 | qh  139 |

De acordo com a conjectura, ambas as simetrias existem ⎯ individualmente, é claro ⎯ e, portanto o index **k** comporta-se de forma aleatória, como se vê nos exemplos

kg  12 e kh  6 ou

kg  18 e kh  36,

Não havendo conexão entre **g** e **h**.

Contudo, observamos a possibilidade de encontrar em cada par eleito para testes, casos em que o index **k** podia ser único, conforme se vê em outros dois exemplos, com

kg  kh  30 ou

kg  kh  66,

Havendo um vínculo entre **g** e **h**.

Esta condição ⎯ **k  kg  kh** ⎯ é a base deste estudo e estamos interessados apenas quando e se ela puder ocorrer; nesta situação:

Para qualquer par **(g, h)** podemos fazer

(g  k) p,

(g  k) q,

(h  k)  p  2,

(h  k) q  2.

Portanto teremos:

**g  (p  q)  2** e

**h  [ (p 2)  (q  2) ]  2.**

Procurando somente estas soluções tivemos algum sucesso com vários testes, o que nos induziu à teoria que segue e para distinguir os primos gêmeos em que **kg ≠ kh** de outros em que **kg  kh** adotamos o seguinte conceito:

**Primos Gêmeos Idênticos**

São aqueles em que pelo menos um **k**, simultaneamente, atende um par **(g, h)**.

Portanto, dentre as simetrias dos exemplos anteriores, somente as seguintes identidades podem ser consideradas **primos gêmeos idênticos**:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Par (g, h)** | **k** | **p** | **q** |
| g  71  h  73 | 30 | pg  41 | qg  101 |
| ph  43 | qh  103 |
| 66 | pg  5 | qg  137 |
| ph  7 | qh  139 |

Em pesquisas iterativas com k, pudemos conduzir a simetria desta forma para primos gêmeos idênticos de pequena magnitude, e percebemos que foi possível obtê-los muitas vezes. Na *Tabela 1* temos o resultado dos primeiros pares.

Porem, como se vê na tabela, já iniciamos com dois pares onde não se pode obter simetria simultânea e, mais adiante, paramos no par (197, 199), também na mesma situação; ou seja, há casos impossíveis, se exigirmos que **n > k**.

Neste momento faremos uma pausa em nosso estudo de primos gêmeos.

Vamos revisitar a conjectura original considerando o que ocorreria se pudéssemos expandir a simetria a valores negativos, ou seja, se tornássemos possível **k > n**.

Sem restrição para **k**, observa-se, de imediato, simetria com amplitude infinita.

Analogamente, como na conjectura inicial, mantem-se as igualdades:

**n  (p  q)  2**, sendo

**p  n  k** e

**q  n  k;**

Onde são primos:

**| p |** e **q**.

Observar que agora se podem obter **quaisquer** inteiros, e que, em particular:

**n  0** com quaisquer primos, para p q  0;

**n  1** com quaisquer pares de primos gêmeos;

**n < 0** é reflexo de **n > 0**.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Tabela 1** | | | |
| **Pares** | **k** | **pg | ph** | **qg | qh** |
| 3  5 | impossível | | |
| 5  7 | impossível | | |
| 11  13 | 6 | 5 | 17 |
| 7 | 19 |
| 17  19 | 12 | 5 | 29 |
| 7 | 31 |
| 29  31 | 12 | 17 | 41 |
| 19 | 43 |
| 41  43 | 30 | 11 | 71 |
| 13 | 73 |
| 59  61 | 42 | 17 | 101 |
| 19 | 103 |
| 71  73 | 30 | 41 | 101 |
| 43 | 103 |
| 101  103 | 90 | 11 | 191 |
| 13 | 193 |
| 107  109 | 90 | 17 | 197 |
| 19 | 199 |
| 137  139 | 132 | 5 | 269 |
| 7 | 271 |
| 149  151 | 42 | 107 | 191 |
| 109 | 193 |
| 179  181 | 168 | 11 | 347 |
| 13 | 349 |
| 191  193 | 90 | 101 | 281 |
| 103 | 283 |
| 197  199 | impossível | | |

A iteração de pesquisa pode ser obtida assim:

Para n par:

k  1, 3, 5, ••• ∞.

Para n impar:

k  2, 4, 6, ••• ∞.

Mas, vamos retornar ao nosso estudo, quando temos **primos gêmeos idênticos**.

A proposta pressupõe o vínculo entre primos gêmeos **g** e **h**, quando e se

**k  kg  kh.**

E, excetuando o par (3, 5), temos que a iteração de k resume-se a:

k  6, 12, 18, ••• ∞

Até que surjam simultaneamente os primos:

| p | e q;

| p  2 | e q  2.

Em resumo, temos:

pg  (g k),

qg  (g k),

ph  (g k 2) e

qh  (g k 2).

Sem restrição para **k** vamos ver aquelas identidades impossíveis de nossa tabela.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Pares** | **k** | **pg | ph** | **qg | qh** |
| 3  5 | 8 | 5 | 11 |
| 3 | 13 |
| 5  7 | 12 | 7 | 17 |
| 5 | 19 |
| 197  199 | 630 | 433 | 827 |
| 431 | 829 |

Interessante; é possível obter simetria.

Ademais, dentre o conjunto dos primeiros 1048576 primos ímpares temos:

3199 identidades representando os primos gêmeos idênticos (5, 7);

1669 identidades para (197, 199).

Curiosamente, mesmo com amplitude infinita, somente existe uma identidade para (3, 5), com k  8, ficando como exercício para o leitor demonstrar o fato.

Dica: outros primos gêmeos são da forma (6m  1, 6m  1) para algum natural m e, portanto, g ≡ 2 (mod 3) e h ≡ 1 (mod 3).

Para simetria de pares de primos gêmeos idênticos é necessário que, em geral, mais de uma coincidência ocorra para **g** e **h** ⎯ isoladamente ⎯ e de tal modo que em algum momento, para valores de **k** idênticos, encontramos primos equidistantes.

Para 12484 primeiros pares de primos gêmeos, e o mesmo conjunto de primos já citado, encontramos múltiplas identidades pretendidas, sendo que o menor número delas foi 1035 para (1302017, 1302019) e o maior valor foi 9468 para (180179, 180181).

Para ilustrar: dentre 2188 identidades para (41, 43) selecionamos alguns casos:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Par** | **k** | **pg | ph** | **qg | qh** |
| 41  43 | 30 | 11 | 71 |
| 13 | 73 |
| 18000 | 17959 | 18041 |
| 17957 | 18043 |
| 1008000 | 1007959 | 1008041 |
| 1007957 | 1008043 |
| 2070000 | 2069959 | 2070041 |
| 2069957 | 2070043 |
| 2163000 | 2162959 | 2163041 |
| 2162957 | 2163043 |
| 3894000 | 3893959 | 3894041 |
| 3893957 | 3894043 |
| 4092000 | 4091959 | 4092041 |
| 4091957 | 4092043 |
| 5010000 | 5009959 | 5010041 |
| 5009957 | 5010043 |

Então parece que sendo a amplitude infinita, com infinitos números primos, é impossível determinar para cada par eleito quantas representações resultam em primos gêmeos idênticos, excluindo, como já mencionado, o par (3, 5), com uma única identidade.

Todavia, resta uma questão em aberto: será que todos os primos gêmeos podem ser identificados como idênticos? Ou seja: os conjuntos são equivalentes?

Então, reiterando, se

(g, h) são primos gêmeos idênticos, temos:

g  (p  q)  2,

h  [ (p  2)  (q  2) ]  2

E, como consequência, também são primos gêmeos os pares

**(p, p  2)** e

**(q, q  2)**.

Portanto, nestas condições, cada par de primos gêmeos idênticos conduz a outros primos gêmeos, porem não necessariamente idênticos!

Mas explorando a questão anterior:

* Se pudéssemos garantir que todos os primos gêmeos também são idênticos

**e**

* Se houvesse um último par de primos gêmeos idênticos **(gu, hu)**.

Significaria que último par de primos gêmeos idênticos remeteria a outro par de primos gêmeos idênticos de magnitude superior, o que seria uma incongruência.

Conclusão: se assim fosse, forçosamente, seriam infinitos os números primos gêmeos.

*P.S.*

*Uma ultima questão:*

*Sendo os primos gêmeos um caso particular da Conjectura de Polignac, seria possível expandir esta nova hipótese?*

*Eu acredito que sim!*

**Ivan Gondim Leichsenring**

Se você puder ajudar a tornar este texto mais legível, eu agradeço.

**Apex Algoritmos [ www.apex.eti.br ]**

**ivan@ apex.eti.br**

**Barueri, São Paulo, Brasil.**